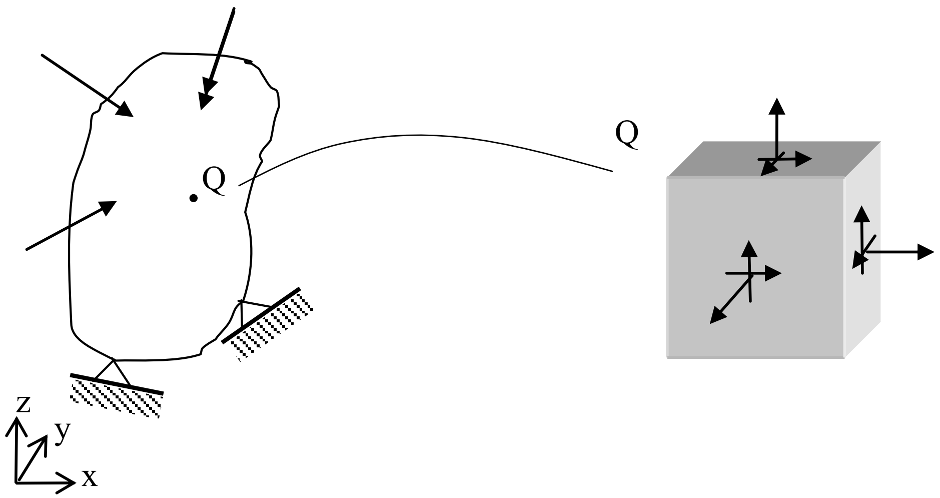
Föreläsning 3 - Hållfasthetslära

Mohrs cirkel, Allmäna töjningstillstånd, Elasticitet
Kap. 9.2.7, 9.2.8, 9.3, 10

Repetition: spänningar

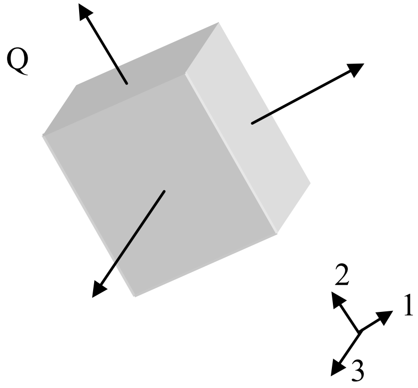


Analys i xyz-systemet ger spänningsmatrisen:

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}_{xyz}$$

Egenvärdesanalys ger en orientering av koordinatsystemet sådan att spänningar på snittytorna endast utgörs av **normalspänningar**, dvs **inga skjuvspänningar** finns.

Detta är **huvudspänningar** och **huvudspänninsriktningar**

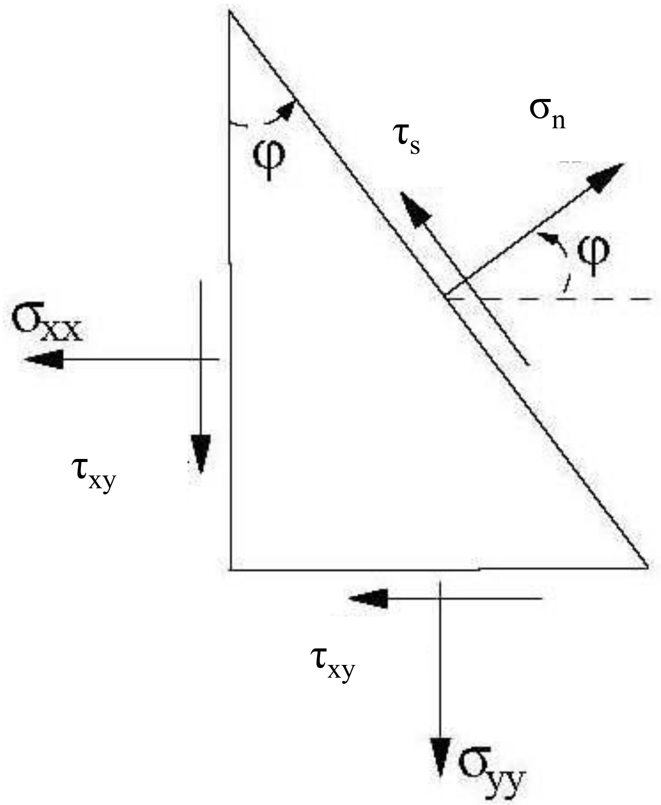


$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}_{123}$$

Mohrs cirklar

Spänningar i ett plan vinkelrät mot en huvudspänningsriktning, vi låter detta vara z-riktningen.

Antar att vi känner spänningarna i xy-planet.



Figur 3.11 Spänningar i planet.

Spänning i godtycklig riktning vinkelrätt mot en huvudspänning

Transformation av spänningsmatrisen ger:

$$\sigma_n = \sigma_{xx}\cos^2\varphi + 2\tau_{xy}\sin\varphi\cos\varphi + \sigma_{yy}\sin^2\varphi \qquad \text{(F.S. 1.9)}$$

$$\tau_s = \left(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\right)\sin\varphi\cos\varphi + \tau_{xy}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

Omskrivning till uttryck med dubbla vinkeln ger:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi$$

$$\tau_s = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi \qquad \text{(F.S. 1.10)}$$

Spänning i godtycklig riktning vinkelrätt mot en huvudspänning

Ekvationerna för normal- och skjuvspänning kan skrivas som

$$\sigma_n - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\tau_s = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

Kvadrera båda ekvationerna och summera deras vänster resp. högerled. Nyttja sedan trigonometriska ettan $\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi = 1$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_s^2 = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

Vilket motsvarar ekvationen för en cirkel

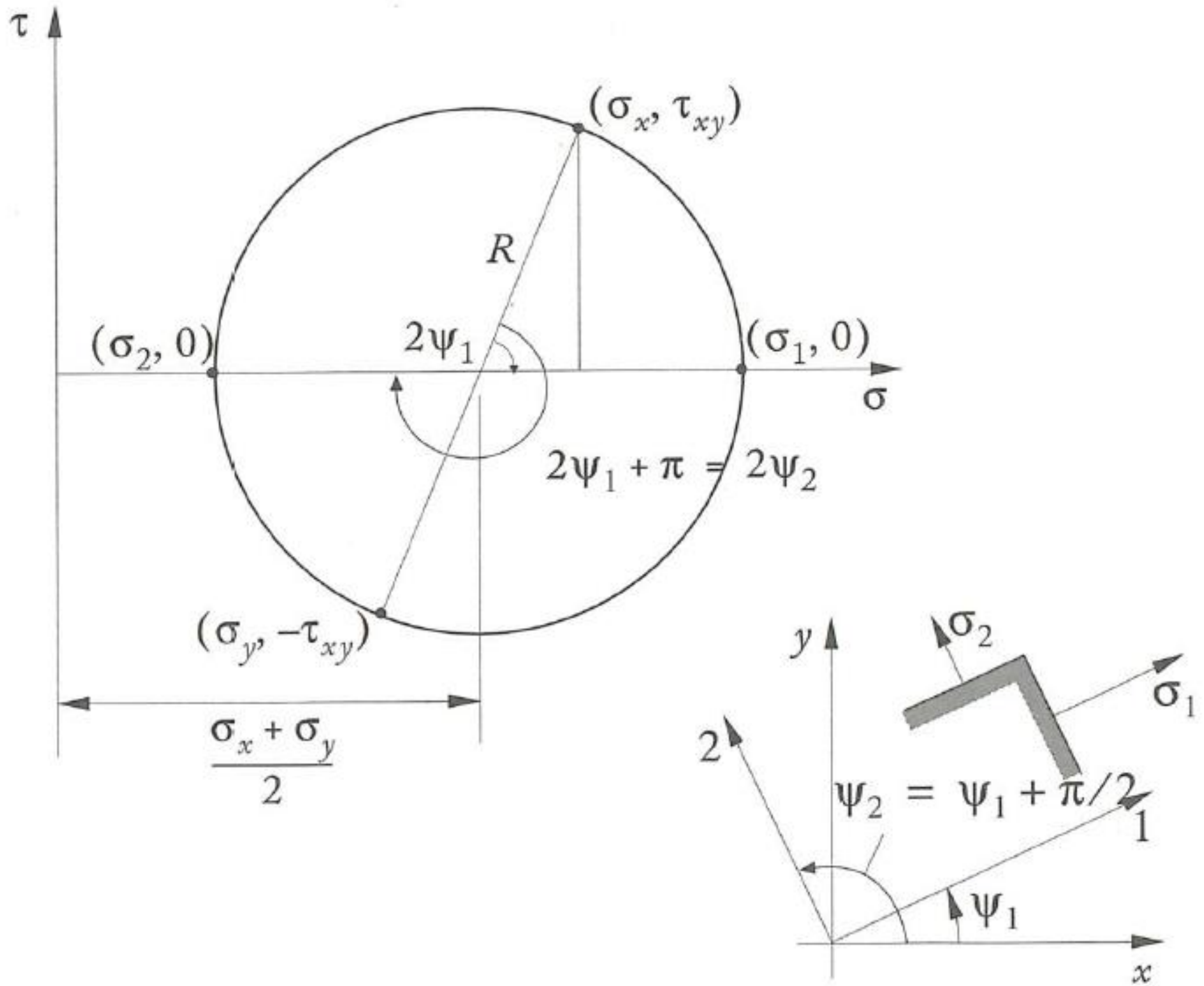
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Mohrs spänningscirkel

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = \sigma_m + R$$
$$\sigma_2 = \sigma_{min} = \sigma_m - R$$
$$\tau_{xy}^{max} = R$$
$$\sigma_m = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \qquad \text{(F.S. 1.11)}$$
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \text{(F.S. 1.12)}$$

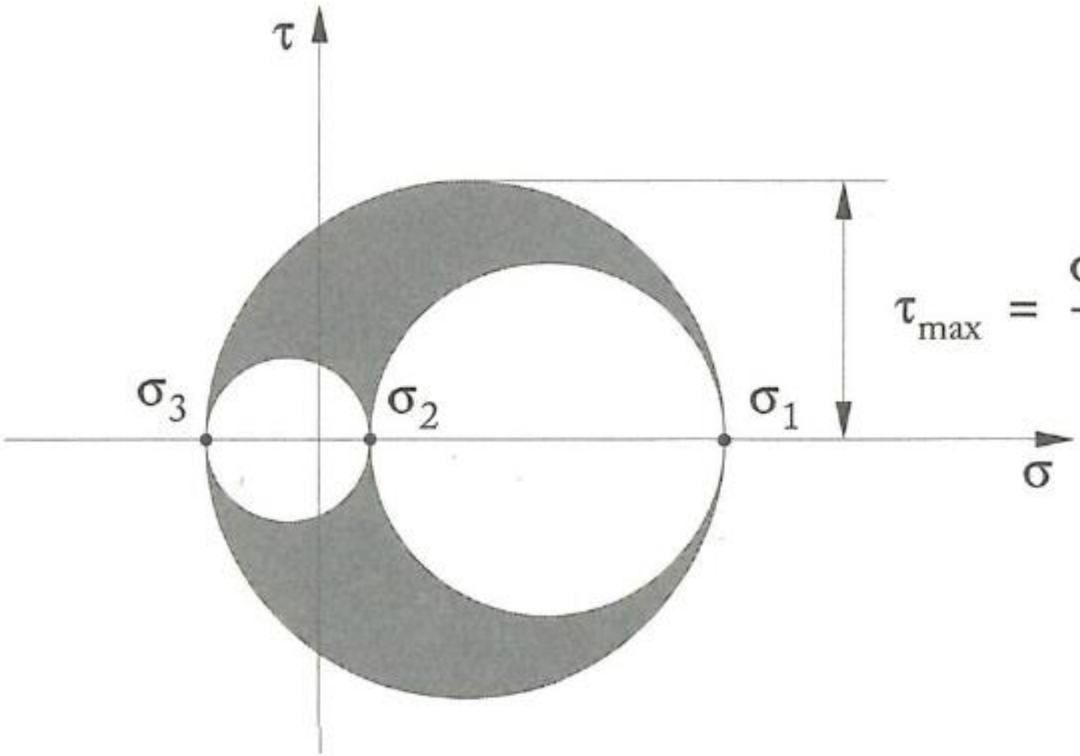
Vinkeln till huvudspänningsriktningen

$$\sin 2\psi = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

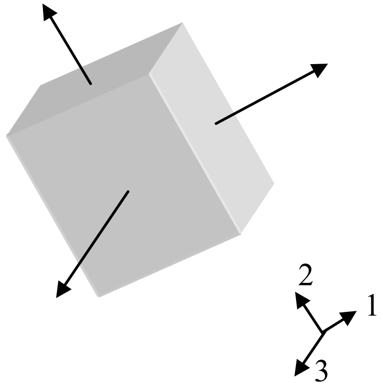


Mohrs cirklar för treaxligt spänningstillstånd

För varje punkt i en kropp kan tre Mohrs cirklar uppritas, var och en gällande för ett plan vinkelrätt mot en av de tre huvudspänningsriktningarna.



$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$



Mohrs cirklar för treaxligt spänningstillstånd

Huvudspänningarna är i storleksordning

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Den till beloppet största skjuvspänningen är

$$|\tau_s|_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Exempel 1

Givet spänningsmatrisen $\tilde{S}$ bestäm huvudspänningar och huvudspänningsriktningar med hjälp av Mohrs cirkel.

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Deformation

Belastning av en kropp ger upphov till **deformation**

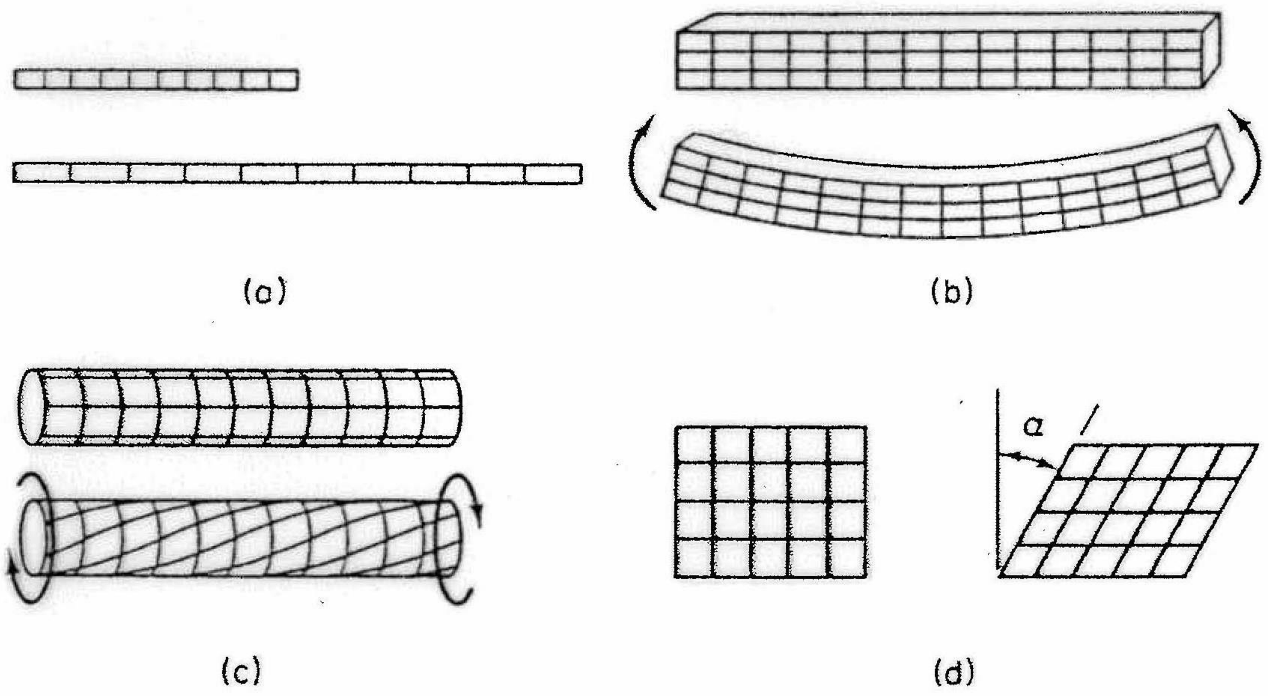


Figure 5.1 Patterns of deformation. (a) Stretching. (b) Bending. (c) Twisting. (d) Simple shear.

Deformation

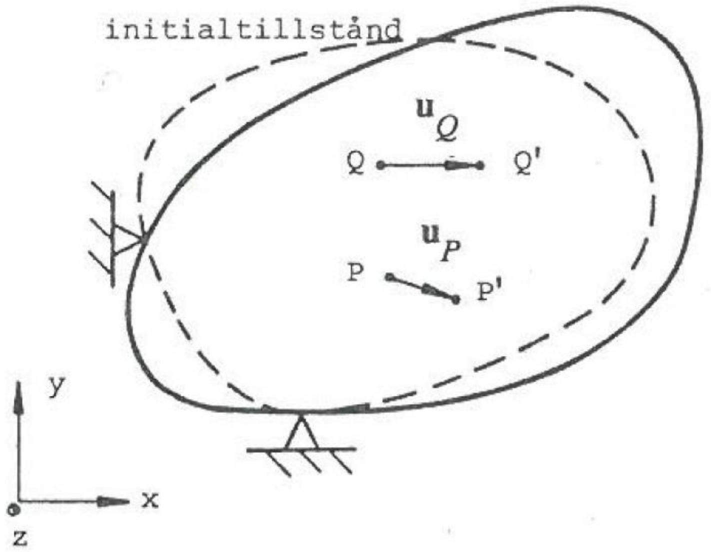
Deformation medför att punkter i kroppen förflyttas. Förflyttning av punkter kallas **förskjutning**.

All förskjutning ger inte deformation. Om alla punkter i kroppen förskjuts lika mycket erhålls ingen deformation (stelkroppsrörelse).

Deformation

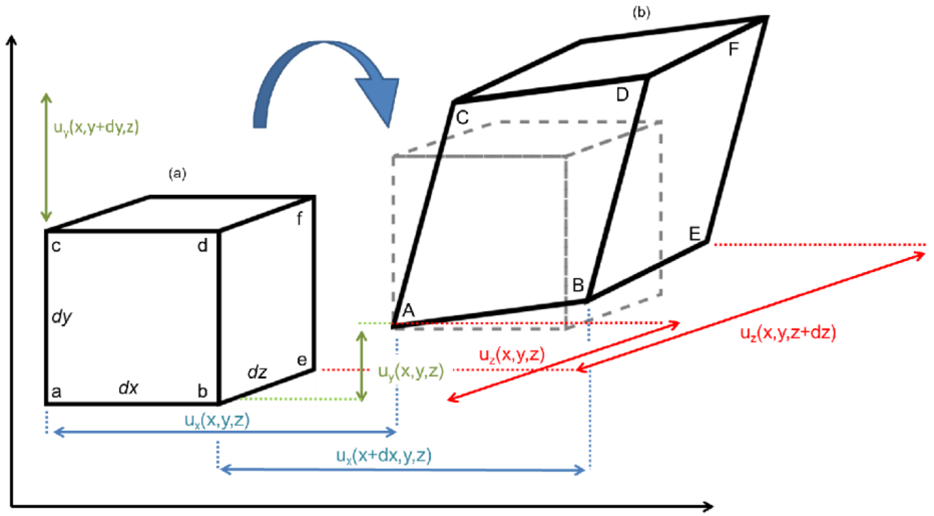
Antag:

- Små förskjutningar
- Små töjningar

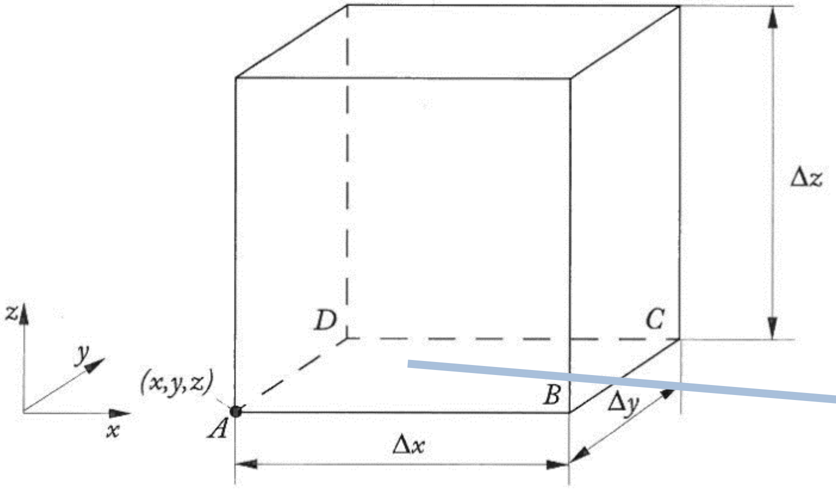


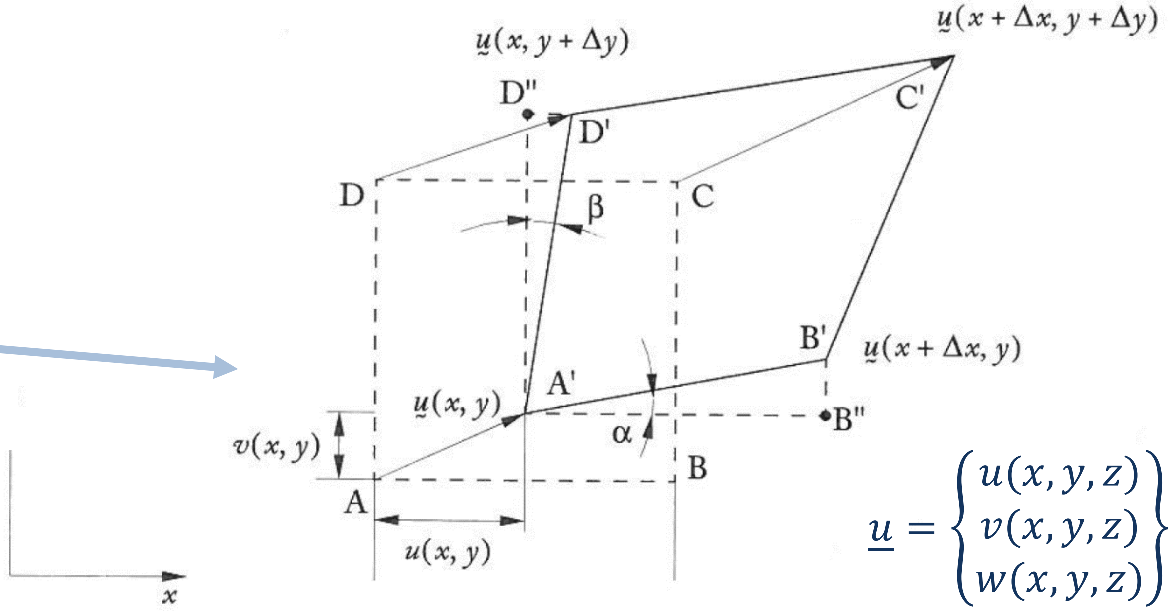
$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix}$$

Överdriven deformation



Allmänna töjningstillstånd





$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

(F.S. 2.2)

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Töjningsmatrisen

Töjningsmatrisen beskriver töjningstillståndet i en punkt relaterad till ett givet koordinatsystem xyz.

$$\tilde{T} = \tilde{T}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Töjningsmatrisen är symmetrisk precis som spänningsmatrisen.

Notera! 6 storheter bildade ur 3 storheter u, v och w. Alltså inte oberoende.

Samband mellan töjningskomponenterna ges av kompatibilitetsekvationerna, se avsnitt 9.3.1 i Lundh.

Normal- och skjuvtöjning

Normal- och skjuvtöjning kan bestämmas i godtycklig riktning på samma sätt som för spänningar.

Normaltöjningen ges av

$$\varepsilon_n = \tilde{n}^T T^T \tilde{n}$$

Skjuvtöjningen ges av

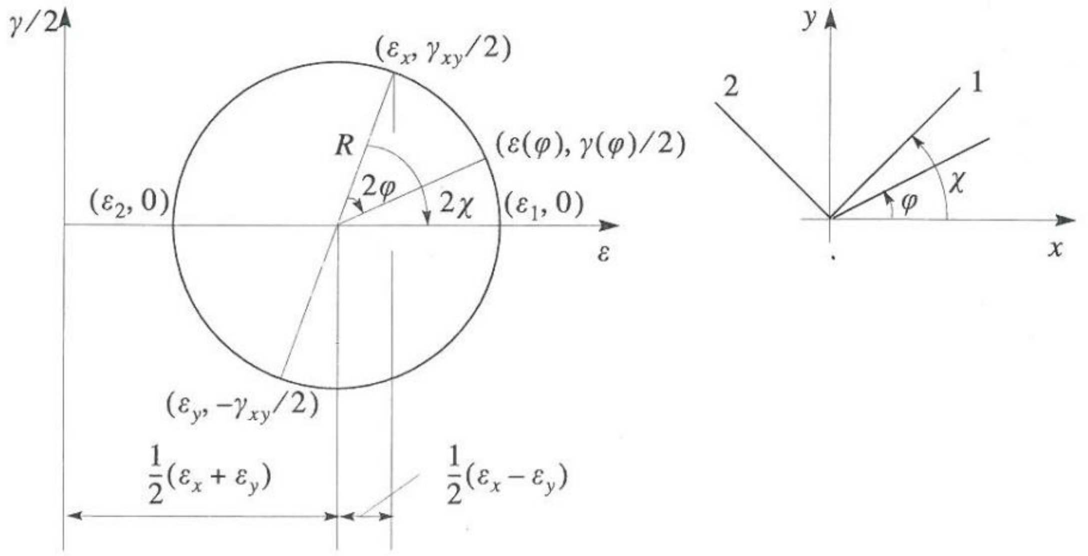
$$\varepsilon_s = \tilde{m}^T T^T \tilde{m}$$

Där $\tilde{m}$ är orthogonal mot $\tilde{n}$ och vinkeländringen sker i *mn*-planet

Huvudtöjningar och huvudtöjningsriktningar

Huvudtöjningar och **huvudtöjningsriktningar** bestäms på samma sätt som för spänningar.

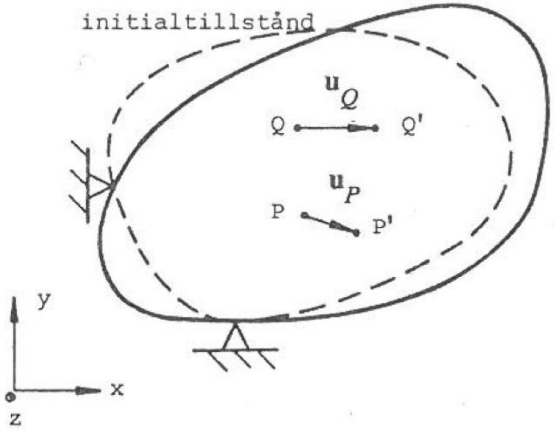
Mohrs töjningscirklar konstrueras på samma sätt som Mohrs spänningscirklar.

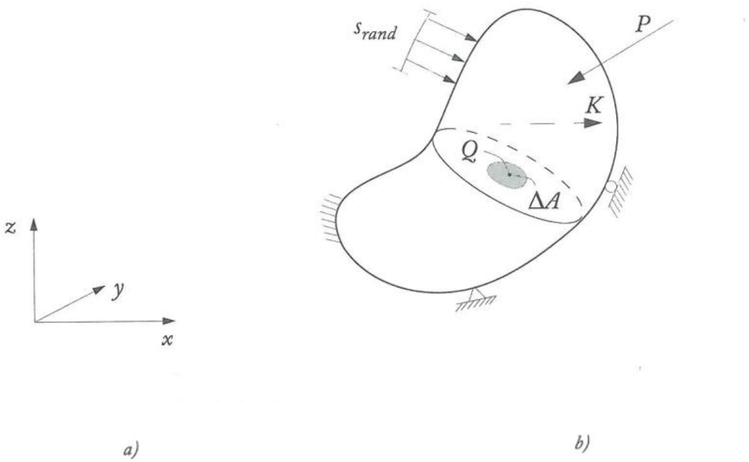


Figur 2.2 Mohrs töjningscirkel

Konstitutivt samband – Hookes lag

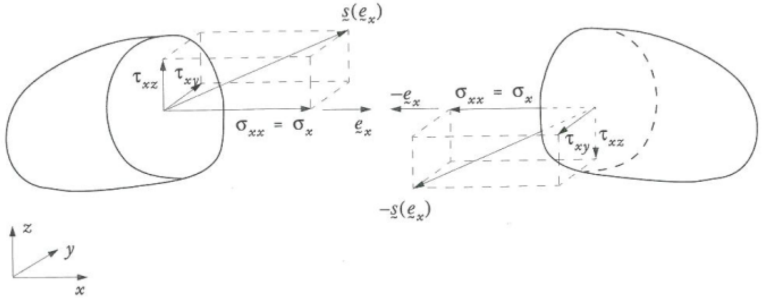
Spännings- och deformationsanalysen som behandlats hittills är oberoende av materialets egenskaper. För att kunna bestämma spännings- och töjningstillståndet i allmänt fall krävs ytterligare samband beskrivande materialets hållfasthetsegenskaper.

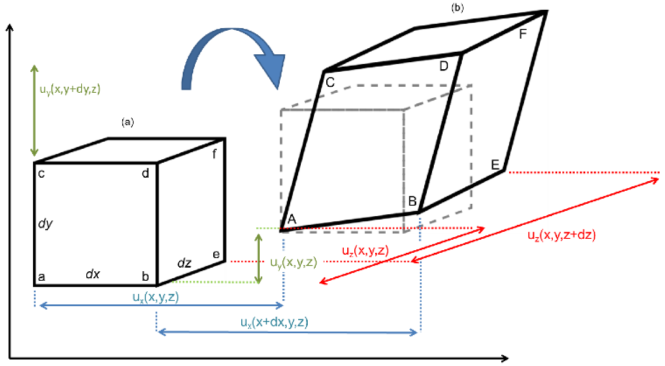




$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$





Konstitutivt samband – Hookes lag

Giltig i det elastiska området

Linjärt samband mellan spänning och töjning

Bra beskrivning för många konstruktionsmaterial

- Metaller
- Glas
- Betong
- Fiberkompositer
- Trä

Sämre eller ej tillämpbar för t.ex. gummi

Isotropi

Isotropi innebär samma materialegenskaper i alla riktningar

- Metaller
- Glas
- Betong

Motsatsen är anisotropa material där egenskaperna är riktningsberoende

- Trä (betrakta fiberriktning hos trä)
- Fiberkompositer

Hookes lag – linjärt samband

Ett linjärt samband mellan σ och ε ger oss analytiska fördelar då superpositionsprincipen går att använda.

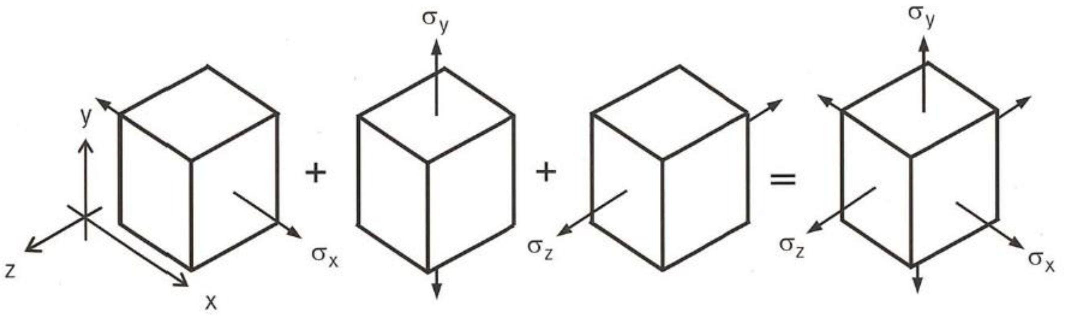
Jämför

$$y(x_1 + x_2) = y(x_1) + y(x_2)$$

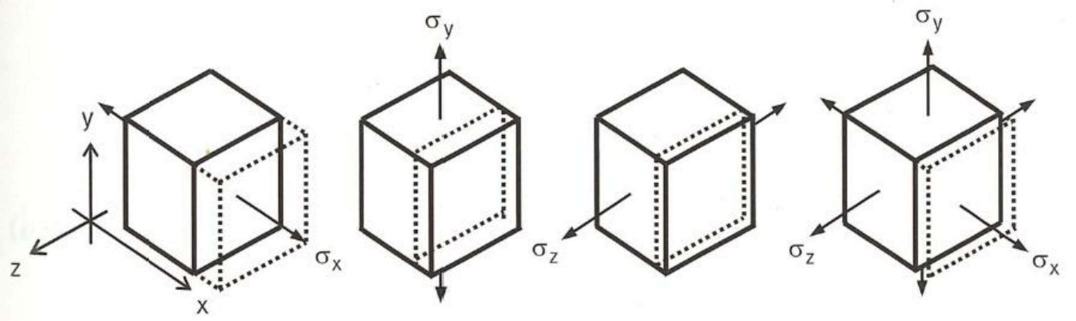
$$y(c \cdot x) = c \cdot y(x) \text{ där } c \text{ är konstant}$$

Hookes lag – linjärt samband

Superposition av spänningar:



Superposition av töjningar:



$$\varepsilon_{x1}\left(=\frac{\sigma_x}{E}\right)+\varepsilon_{x2}\left(=-\frac{\nu\sigma_y}{E}\right)+\varepsilon_{x3}\left(=-\frac{\nu\sigma_z}{E}\right)=\varepsilon_x$$

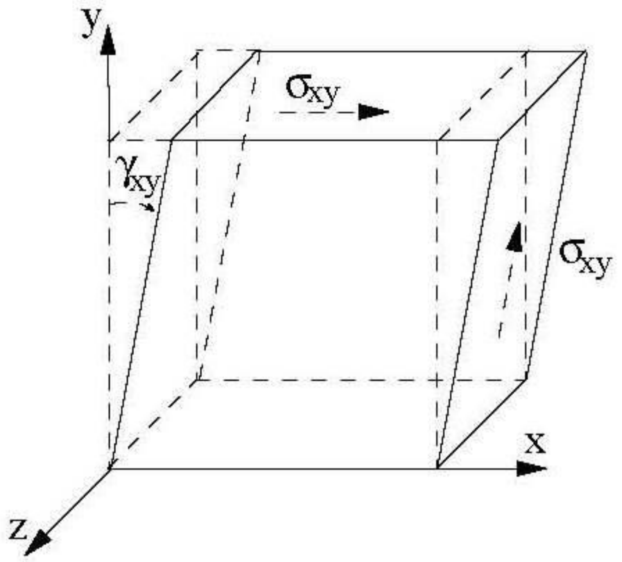
Figur 11.2
Superposition av normaltöjningar i x-riktningen.

Hookes lag – enaxligt:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon_{tvärs} = -\nu \cdot \varepsilon_{längs}$$

Skjuvspänning, ren skjuvning



Figur 5.4 Deformation och spänning vid skjuvning.

Linjärt samband mellan skjuvtöjning och skjuvspänning där *G* är **skjuvmodulen**.

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

Hookes generaliserade lag

De tidigare sambanden ger Hookes generaliserade lag, töjning som funktion av spänning:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\sigma_{zz} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \qquad \text{(F.S. 3.4)}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$
$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

Hookes generaliserade lag

Spänning som funktion av töjning:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz})\right)$$
$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz})\right)$$
$$\sigma_{zz} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz})\right) \qquad \text{(F.S. 3.5)}$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$
$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$
$$\tau_{yz} = G\gamma_{tz}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Plana tillstånd

Specialfall, plant spänningstillstånd (en huvudspänning = 0)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} \qquad \sigma_{xx} = \frac{E}{1+\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\sigma_{xx} \qquad \sigma_{yy} = \frac{E}{1+\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right)$$

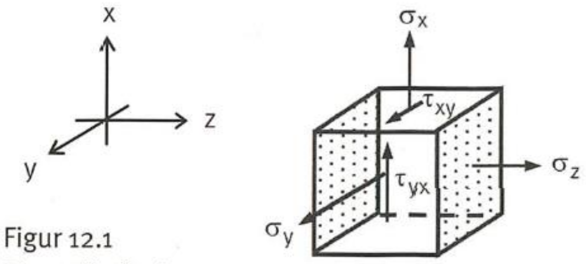
$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \qquad \sigma_{zz} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \qquad \text{(F.S. 3.6)}$$

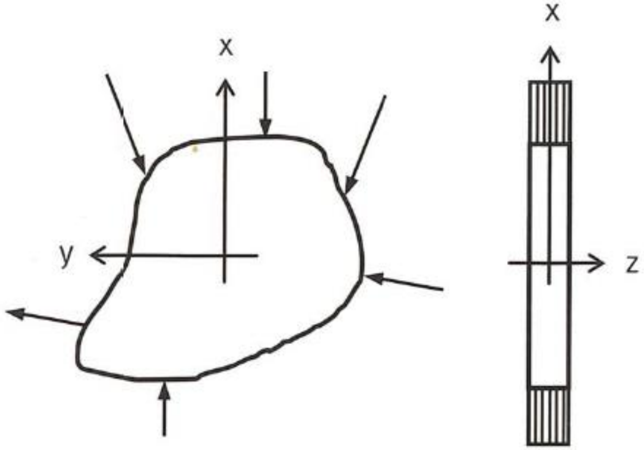
$$\gamma_{xz} = 0 \qquad \tau_{xz} = 0 \qquad \text{(F.S. 3.7)}$$

$$\gamma_{yz} = 0 \qquad \tau_{yz} = 0$$

$\tau_{zx} = (\tau_{xz}) = \tau_{zy} = (\tau_{yz}) = 0.$



Figur 12.1
Plant tillstånd.



Plana tillstånd

Plant töjningstillstånd (en huvudtöjning = 0)

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})\right) \qquad \varepsilon_{xx} = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_{xx} - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{yy}\right) \qquad \text{(F.S. 3.8)}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})\right) \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_{yy} - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{xx}\right) \qquad \text{(F.S. 3.9)}$$

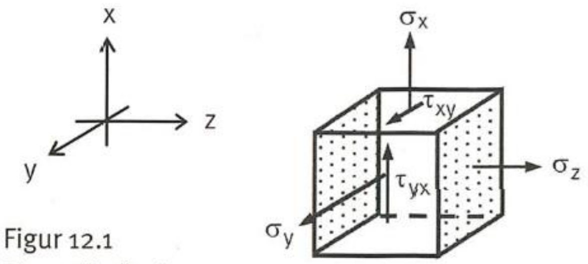
$$\sigma_{zz} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \qquad \varepsilon_{zz} = 0$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

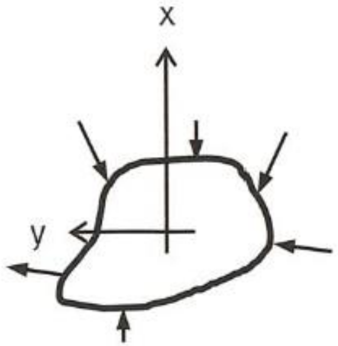
$$\tau_{xz} = 0 \qquad \gamma_{xz} = 0$$

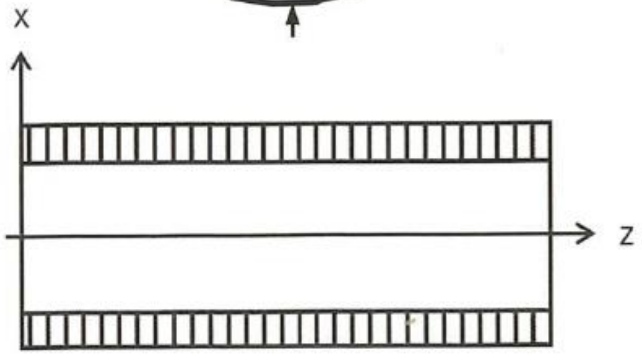
$$\tau_{yz} = 0 \qquad \gamma_{yz} = 0$$

$$\tau_{zx} = (\tau_{xz}) = \tau_{zy} = (\tau_{yz}) = 0.$$



Figur 12.1
Plant tillstånd.

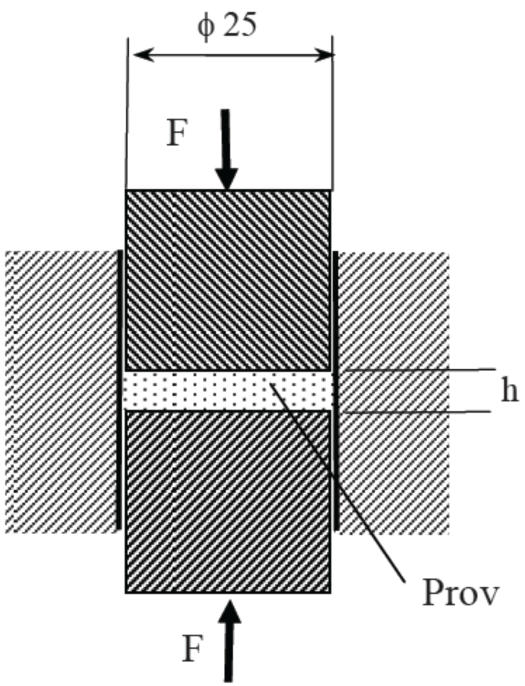


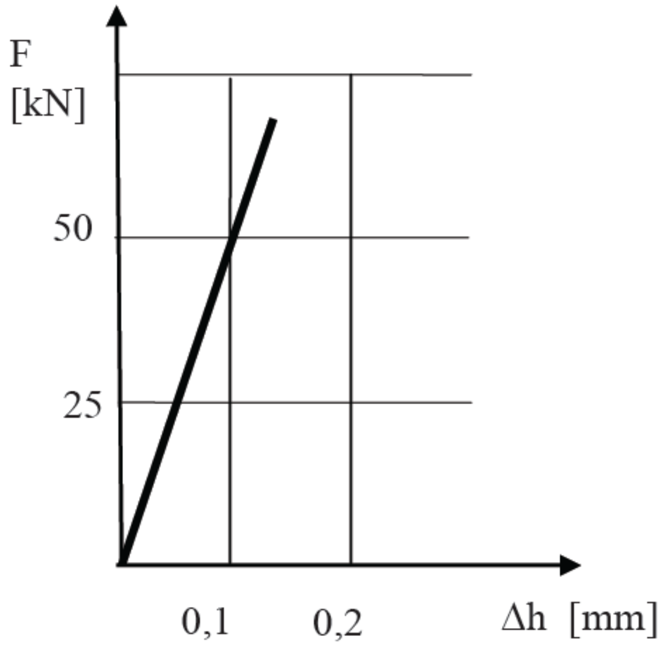


Exempel 2

Vid provning av ett mjukt plastmaterial komprimeras ett myntformat prov med tjockleken h=4mm och diametern Φ=25mm. Provet är placerat mellan två stela kolvar och passar precis i ett cylindriskt hål (Φ=25mm) i ett stelt material enligt figuren. Kolvarna pressas mot provet och kraften F och ändringen av provets tjocklek Δh mäts. Sambandet mellan pålagd kraft och tjockleksändring framgår av figuren.

Beräkna provets e-modul om Poissons tal är v=0.45. Förutsätt att friktionen är noll överallt.





LULEÅ
TEKNISKA
UNIVERSITET