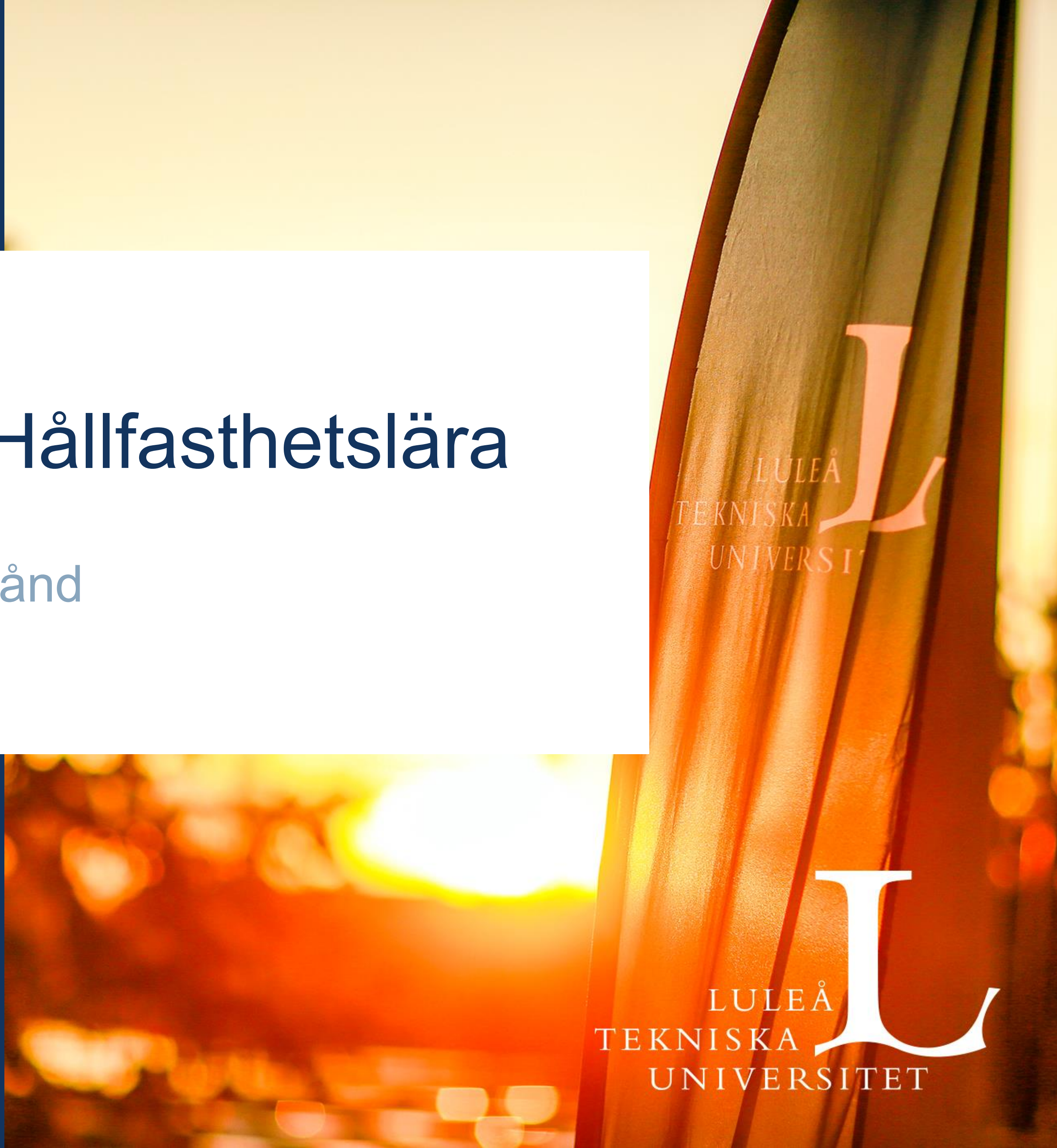
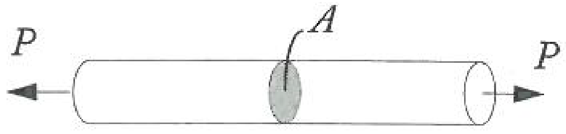
Föreläsning 2 - Hållfasthetslära

Allmänna spänningstillstånd
Kap. 9.1-9.2

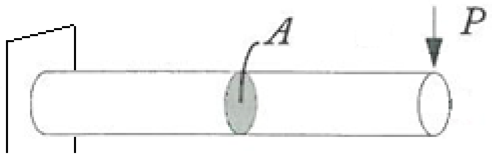


Skjuvbelastning

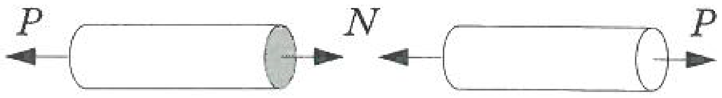
Dragbelastad stång

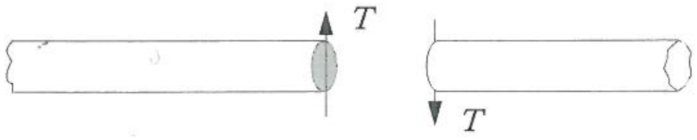


Skjuvbelastad balk



Snitt:





Spänning:

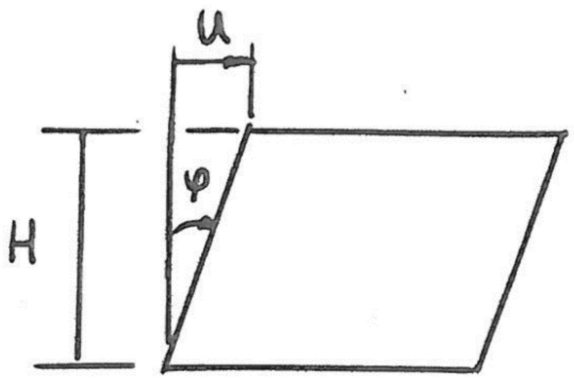
$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A}}$$

$$\boxed{\tau = \frac{T}{A}}$$

Skjuvtöjning

- Vid skjuvbelastning fås deformation i form av vinkeländring

  - u, förskjutning [mm]
  - H, höjd [mm]
  - φ, skjuvvinkel [rad]
  - γ, skjuvtöjning [-]



$$\varphi = tan\left(\frac{u}{H}\right)$$

$$\boxed{\gamma = \frac{u}{H}}$$

$$\boxed{\gamma = \varphi}$$ Vid små deformationer

Hookes lag för skjuvtöjning

- På samma sätt som för axialbelastad stång finns materialsamband mellan spänning och töjning

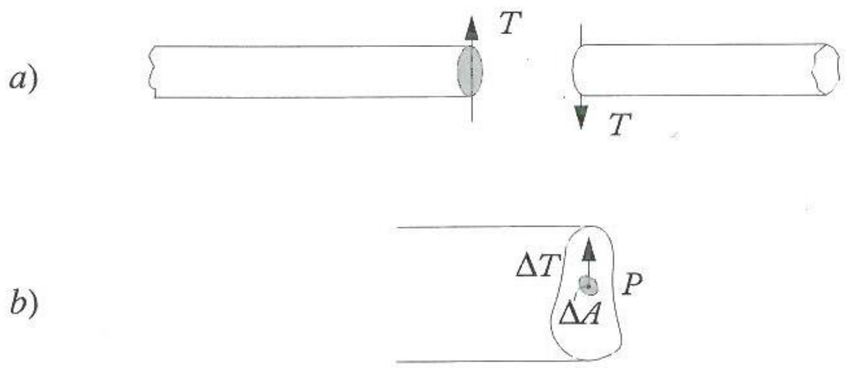
$$\boxed{\tau = G \cdot \gamma} \qquad \text{(F.S. 3.5)}$$

- G, skjuvmodul [GPa]

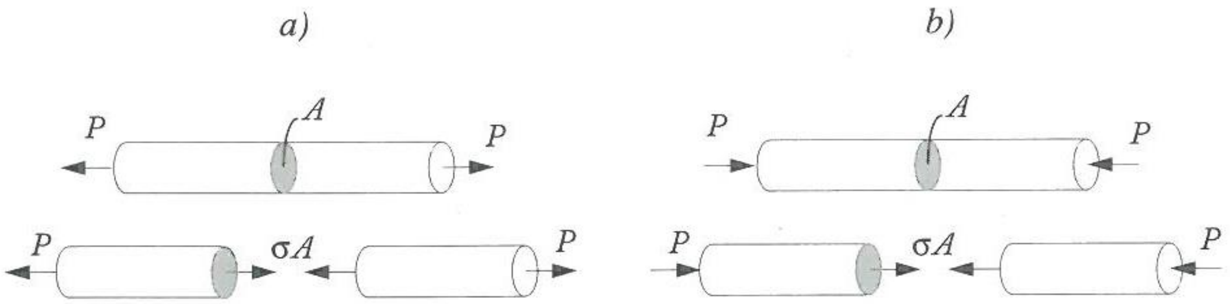
$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}} \qquad \text{(F.S. 3.2)}$$

- E, elasticitetsmodul [GPa]
- ν, tvärkontraktionstalet

- Hittills i kursen: enaxligt tillstånd
- Påkänningen har beskrivits med normalspänningen σ alt. skjuvspänningen τ



Inre tvärkraft a) T i tvärbelastad stång b) ΔT på areaelement i stång



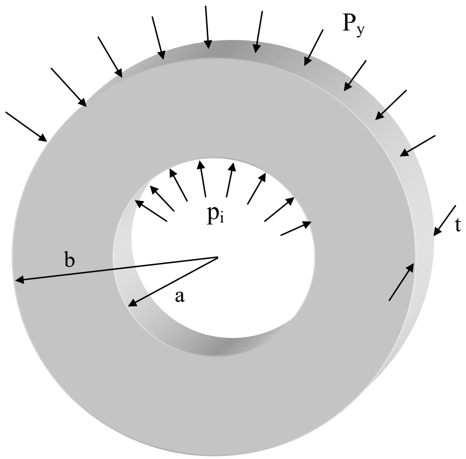
Axialbelastad stång med konstant area och normalkraften uttryckt som spänning vid a) dragkraft b) tryckkraft

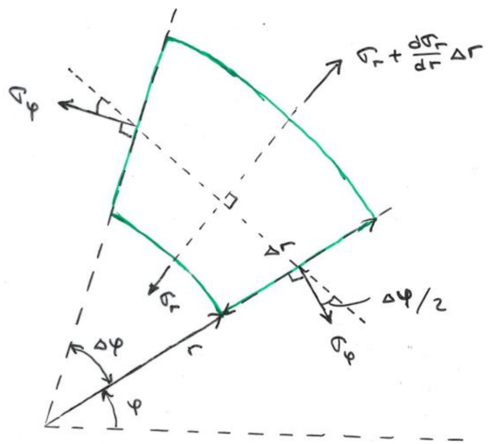
Dimensionering

- Dimensionering mot plasticitet för **enaxligt** tillstånd:

$$\sigma_{normal} < \sigma_s \text{ (sträckgräns från dragprov)}$$

- Men, redan till synes enkla geometrier som rör, tunna skivor och plattor kan inte alltid beskrivas utgående från det enaxliga tillståndet!

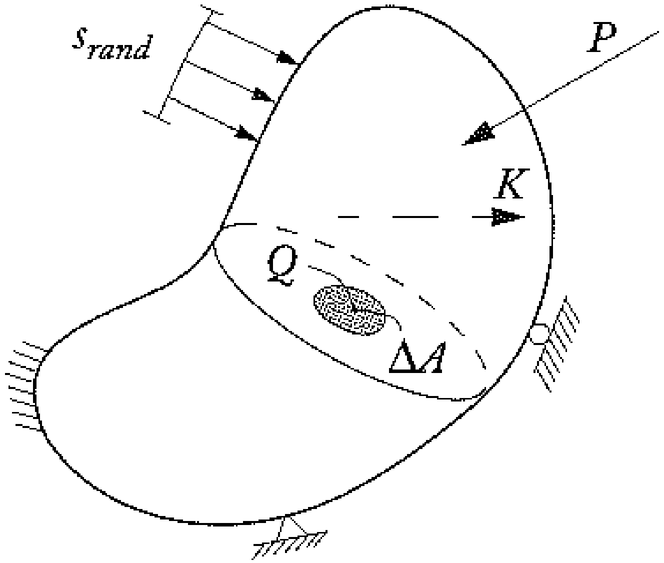


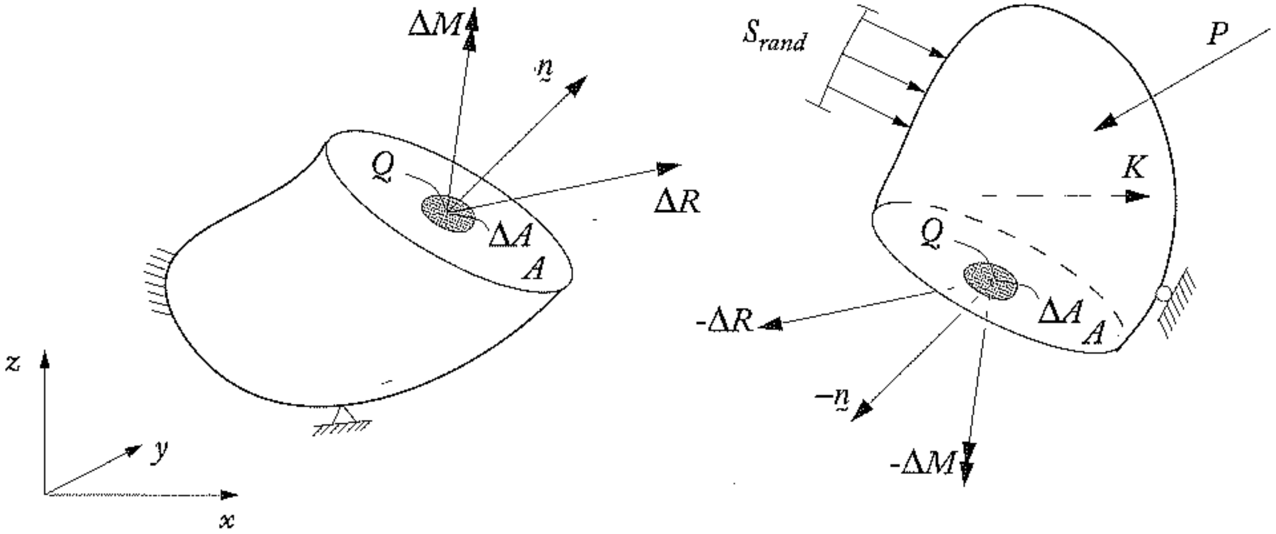


Dimensionering

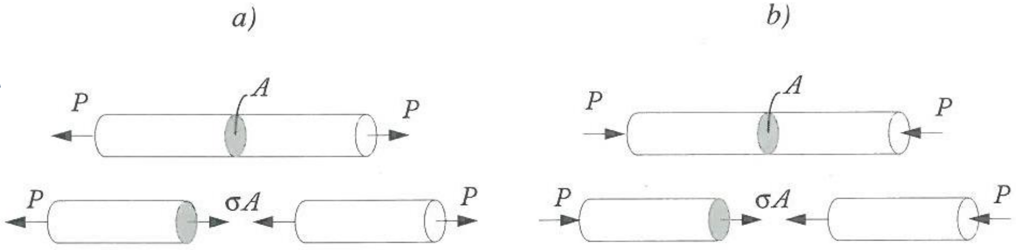
- Hur finna dimensionerande kriterier när spänningskomponenterna är **flera** till antalet?
- Syftet med kommande föreläsningar är att om fleraxligt tillstånd råder så ska vi kunna beskriva den belastade kroppens påkänningar på ett sätt så att vi kan sätta upp dimensioneringskriterier, jmf enaxligt tillstånd.

Allmänt belastad kropp



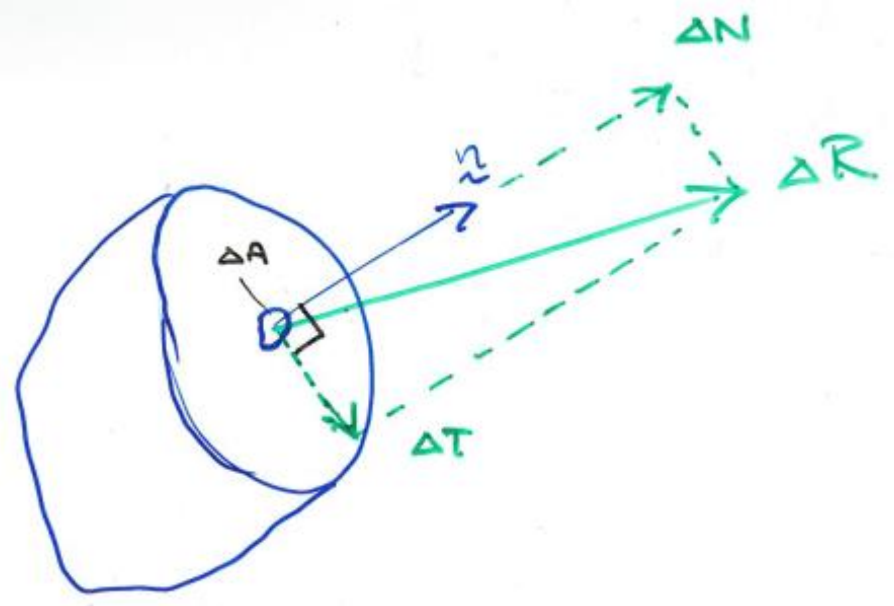


Enaxligt



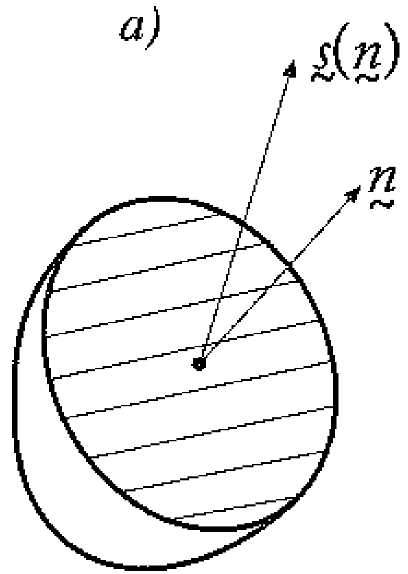
Figur 2. Axialbelastad stång med konstant area och normalkraften uttryckt som spänning vid a) dragkraft b) tryckkraft

Allmänt belastad kropp



Definition av spänningsvektor

$$\tilde{s}(\tilde{n}) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}$$



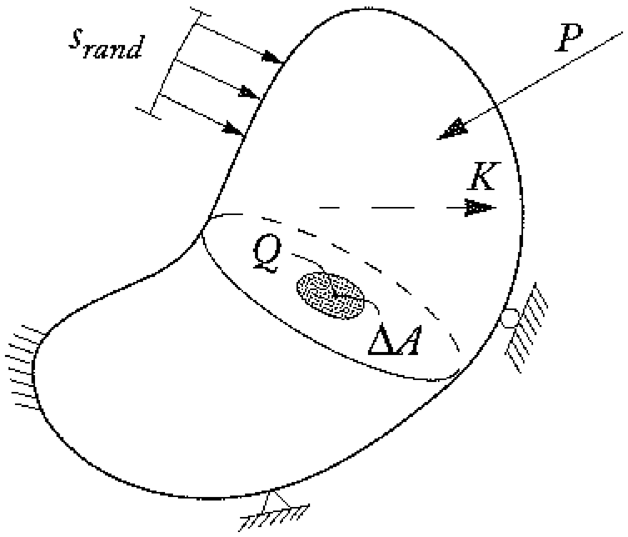
$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} = \sigma$$ Definition normalspänning

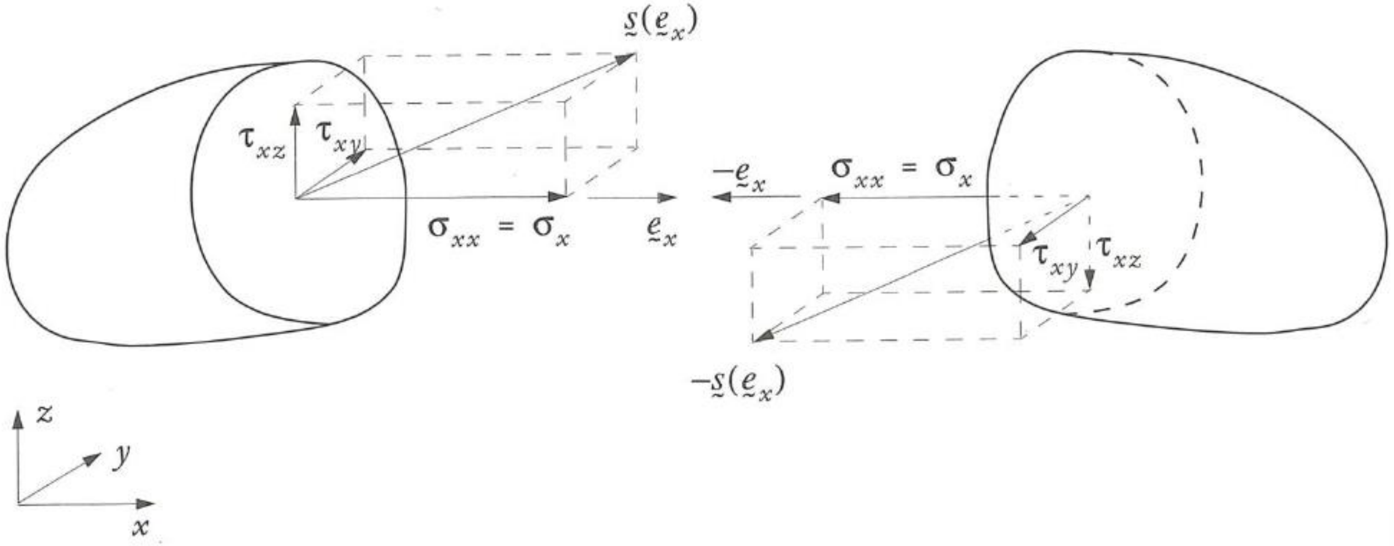
$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} = \tau$$ Definition skjuvspänning

Allmänt belastad kropp

Snitt av kroppen i planet med *x* som normal.
Spänningen i punkten *Q* beskrivs av $\tilde{s}(\tilde{e}_x)$.

$\tilde{s}(\tilde{e}_x)$, delas upp i
komponenter: σ_{xx}, τ_{xy}, τ_{xz}



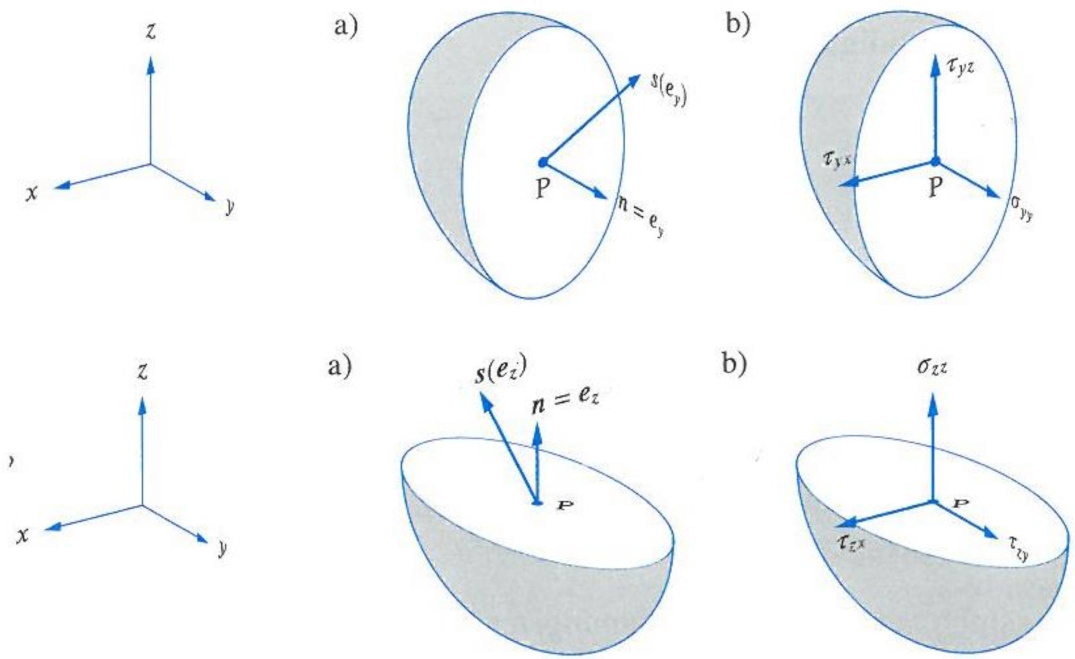


Allmänt belastad kropp

Nya snitt med y och z som normal:

$\tilde{s}(\tilde{e}_y)$, delas upp i komponenter: $\sigma_{yy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}$

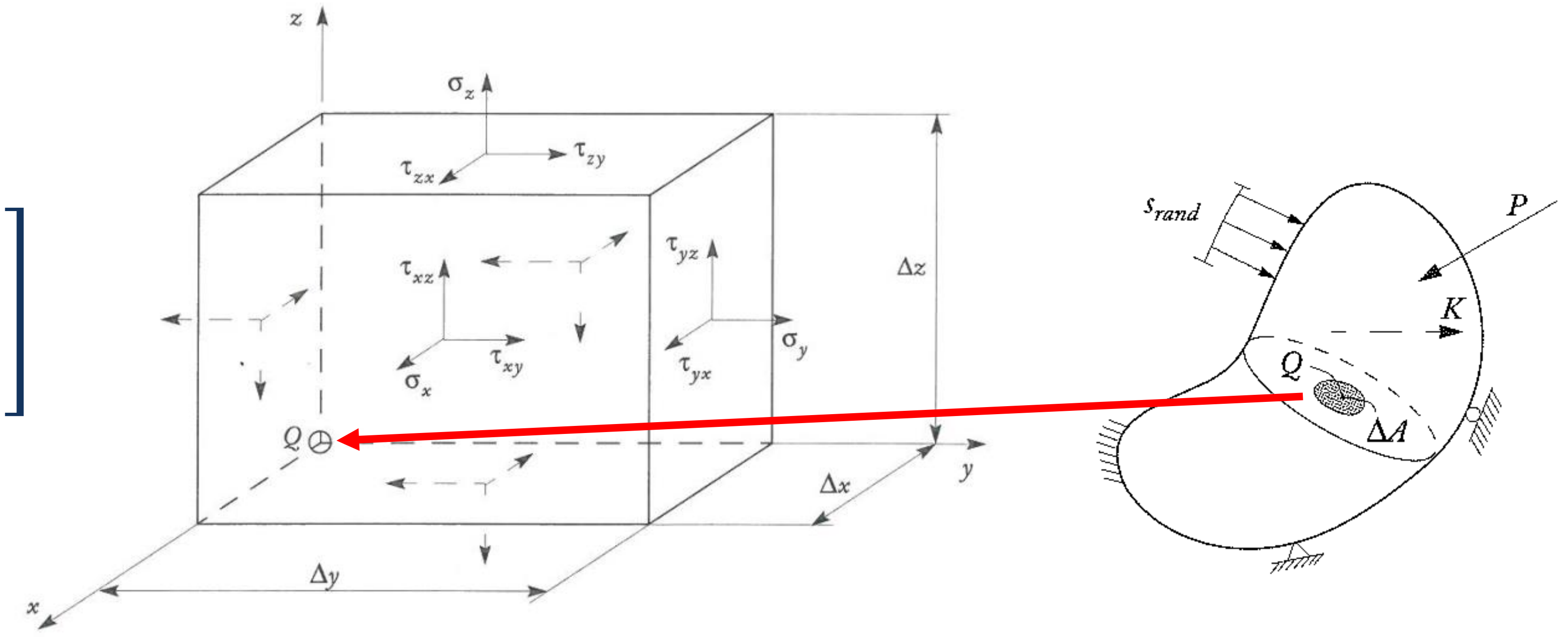
$\tilde{s}(\tilde{e}_z)$, delas upp i komponenter: $\sigma_{zz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$



Allmänt belastad kropp

- Belastningens riktning och storlek i en punkt i en kropp ges av spänningsvektorns komponenter i de tre koordinatriktningarna → 9 komponenter
- Spänningskomponenterna beskrivs ofta med hjälp av en matris.

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



Symmetri

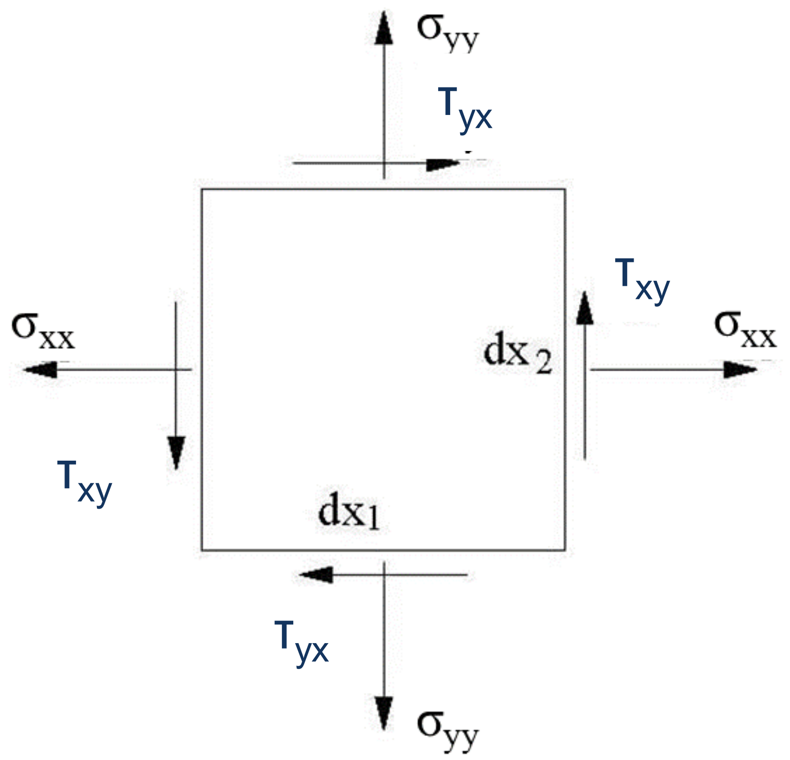
- Nettokraften är noll
- Även momenten, ΣM, ska vara noll

$$\Sigma M = 2\tau_{xy} dx_2 \frac{dx_1}{2} - 2\tau_{yx} dx_1 \frac{dx_2}{2} = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

- Generellt

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$



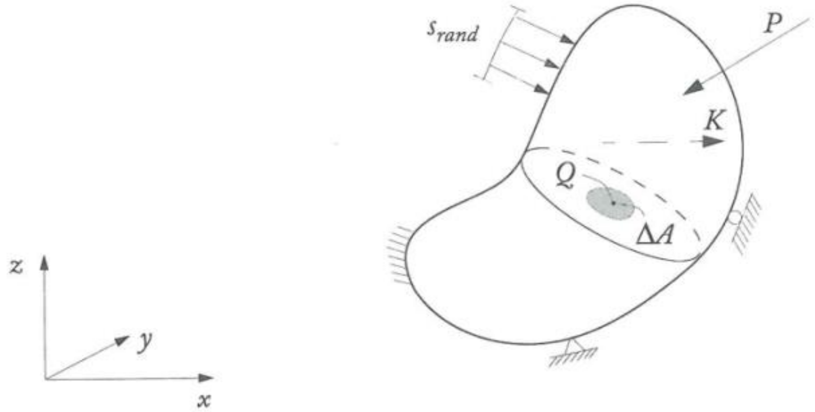
Spänningsmatrisen

- Symmetrisk: 6 unika komponenter
- $\tilde{S} = \tilde{S}^T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$
- Värdena i spänningsmatrisen ändras om koordinatsystemet ändras
- Svårtolkat utifrån dimensioneringshänseende
- Går det att finna en beskrivning av spänningstillståndet som är oberoende hur koordinatsystemet är valt?

Spänningar på sned yta

- Antag att spänningsmatrisen $\tilde{S}$ är bestämd genom att beakta:

$$\tilde{S} = \tilde{S}^T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

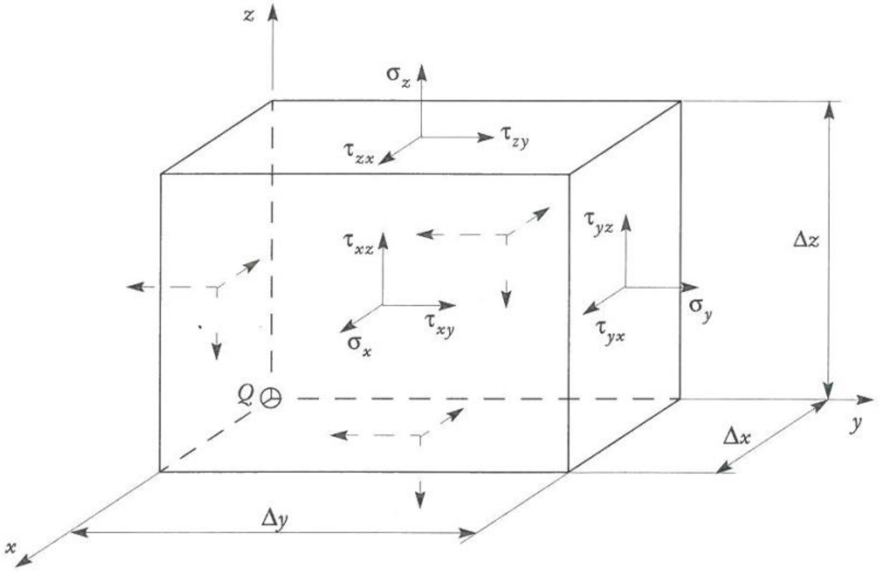


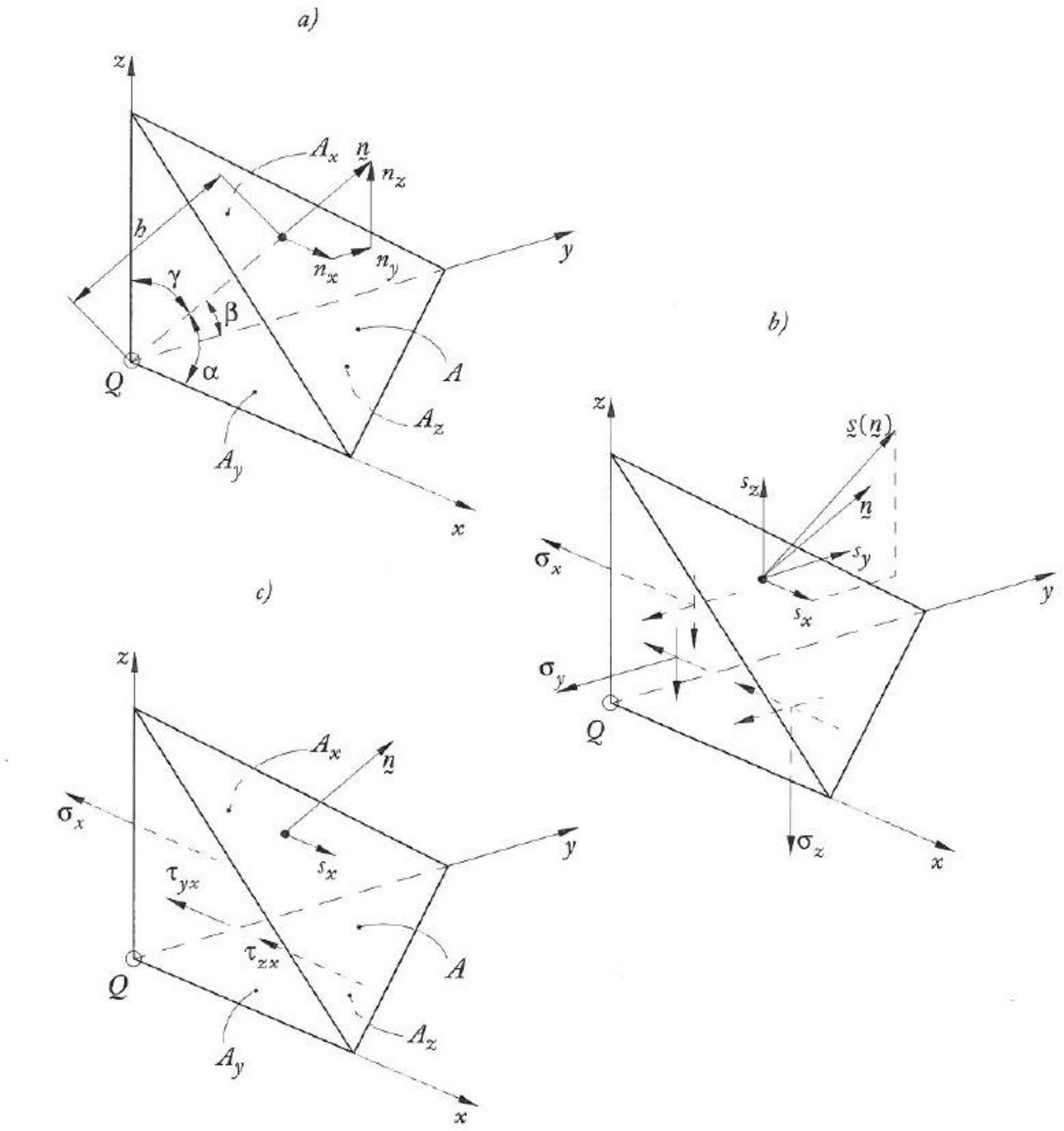
- Bestäm därefter spänning i en godtycklig riktning (sned yta i relation till x-,y och z-koordinatsystem)

Spänningar på sned yta

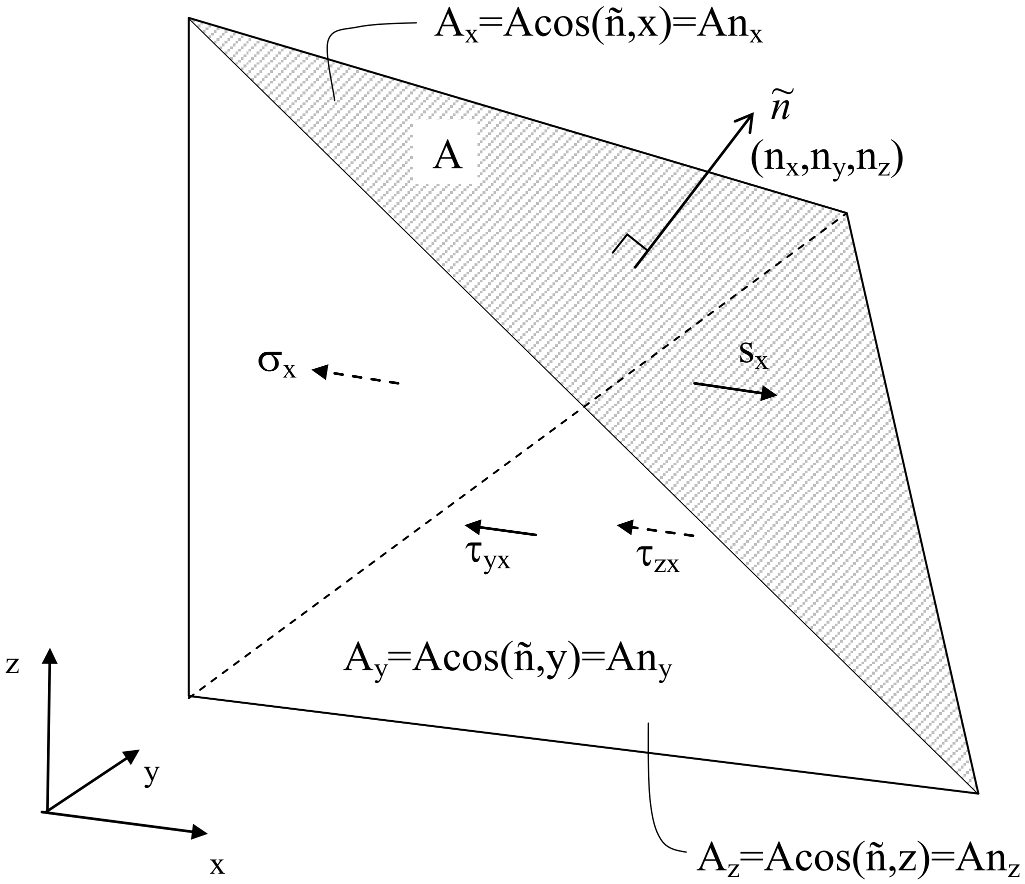
- Antag spänningstillstånd känt i valt koordinatsystem x,y,z

$$\tilde{S} = \tilde{S}^T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$





Spänningar på sned yta



Jämvikt i x-led:

$$s_x \cdot A - \sigma_x \cdot A_x - \tau_{xy} \cdot A_y - \tau_{zx} \cdot A_z = 0$$

$$s_x \cdot A - \sigma_x \cdot An_x - \tau_{xy} \cdot An_y - \tau_{zx} \cdot An_z = 0$$

$$s_x = \sigma_x \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{zx} \cdot n_z$$

På samma sätt i y- och z-led ger:

$$\begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \tilde{s} = \tilde{S} \cdot \tilde{n} \qquad \text{(F.S. 3.5)}$$

$\tilde{S}$ är symmetrisk, dvs $\tilde{S} = \tilde{S}^T$ vilket ger

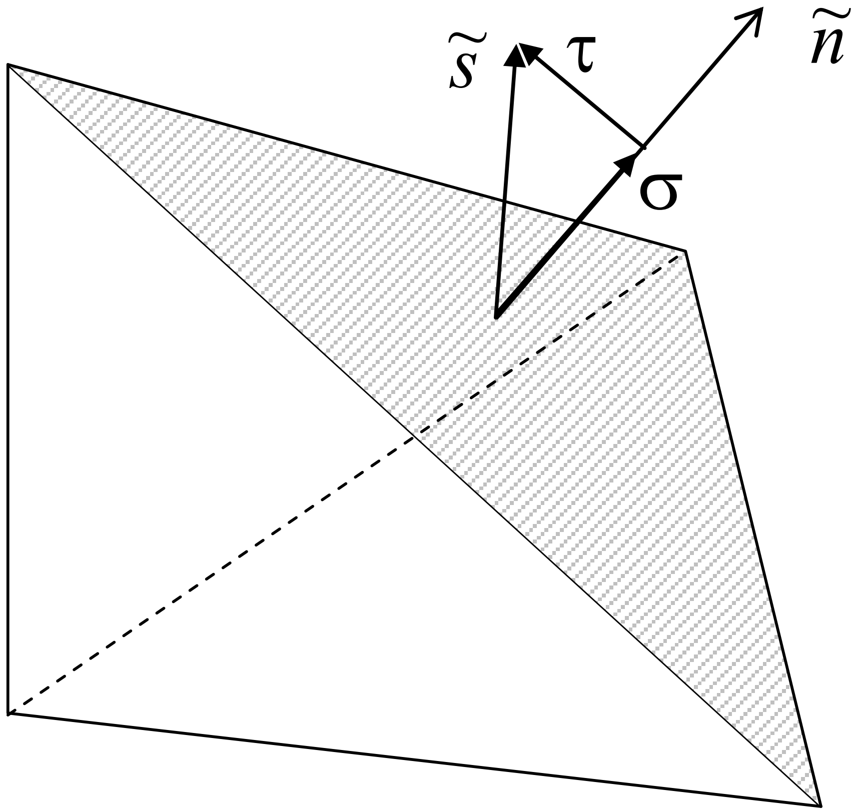
$$\tilde{s} = \tilde{S} \cdot \tilde{n} = \tilde{S}^T \cdot \tilde{n}$$

Normal- och skjuvspänning

Normalspänningen σ är projektionen av $\tilde{s}$ på normalen

$\sigma = \tilde{n}^T \tilde{s} = \tilde{n}^T \tilde{S}^T \tilde{n}$ eller utskrivet

$$\sigma = n_x^2 \sigma_x + n_y^2 \sigma_y + 2n_x n_y \tau_{xy} + 2n_y n_z \tau_{yz} + 2n_z n_x \tau_{zx}$$

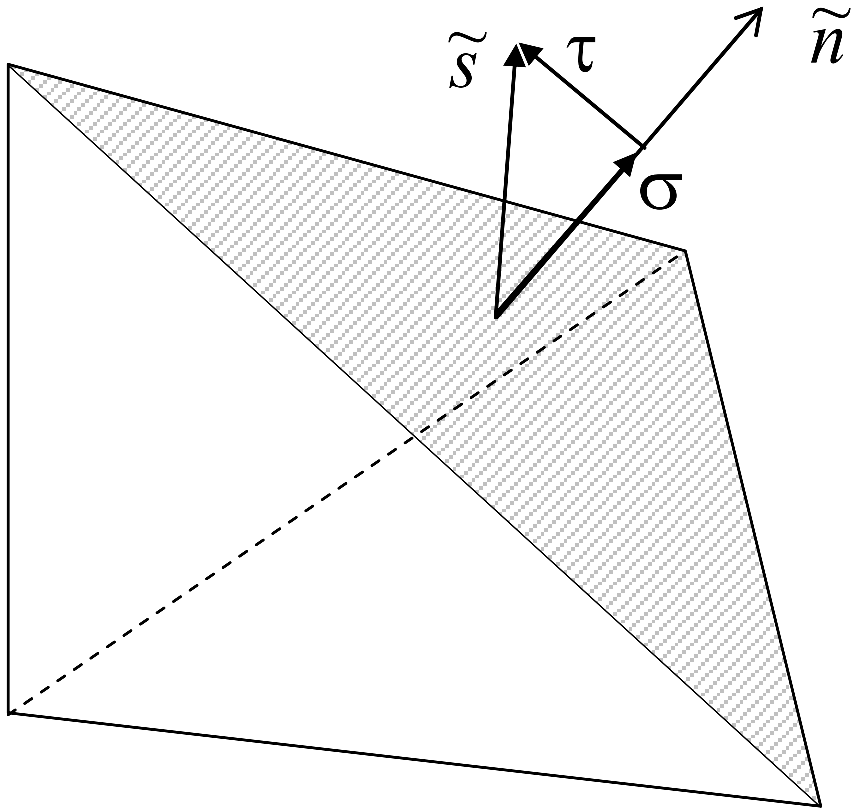


Normal- och skjuvspänning

Skjuvspänningen fås med Pythagoras sats

$$\tau^2 = |\tilde{s}|^2 - \sigma^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 - \sigma^2$$

Alltså:
Normal- och skjuvspänning på vilken yta (riktning) som helst kan beräknas om spänningsmatrisen $\tilde{S}$ är känd.



Sammanfattning

Om spänningsmatrisen $\tilde{S}$ är känd i en punkt relaterad till ett visst koordinatsystem så kan spänningsvektorn $\tilde{s}(s_x, s_y, s_z)$ i ett godtyckligt snitt genom punkten berknas:

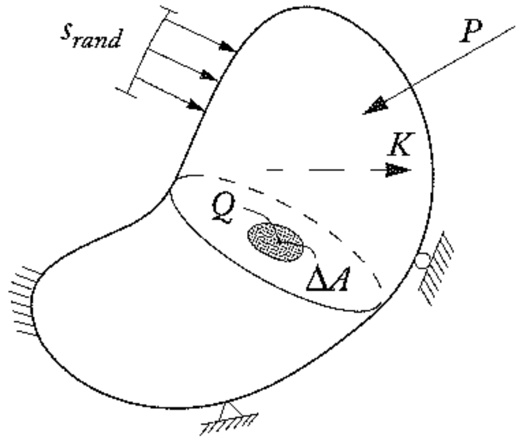
$$\tilde{s} = \tilde{S}^T \tilde{n} = \tilde{S} \tilde{n}$$

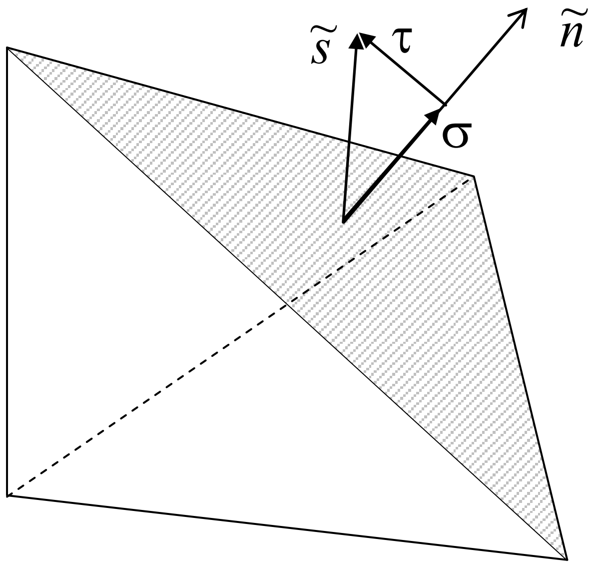
När spänningsvektorn $\tilde{s}$ är känd kan dess projektion σ längs snittytans normal (dvs normalspänningen) beräknas:

$$\sigma = \tilde{n}^T \tilde{s} = \tilde{n}^T \tilde{S}^T \tilde{n}$$

Med hjälp av Pythagoras sats erhålls skjuvspänningen:

$$\tau = \sqrt{|\tilde{s}|^2 - \sigma^2} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 - \sigma^2}$$





Exempel 1

Givet spänningsmatrisen $\tilde{S}$ bestäm spänningsvektorn $\tilde{s}$ på en yta med normalvektor $\tilde{n}$.

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{n} = \begin{bmatrix} \cos 45° \\ \sin 45° \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Storleken på normalspänningen, σ_n, (skalär) ges av:

$$\sigma_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{2}} = \tau_{xy}$$

- Normal- och skjuvspänningsvektorerna ges av:

$$\tilde{\sigma}_n = \sigma_n \tilde{n} = \tau_{xy} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{\tau} = \tilde{s} - \tilde{\sigma}_n = \begin{bmatrix} \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Huvudspänningar

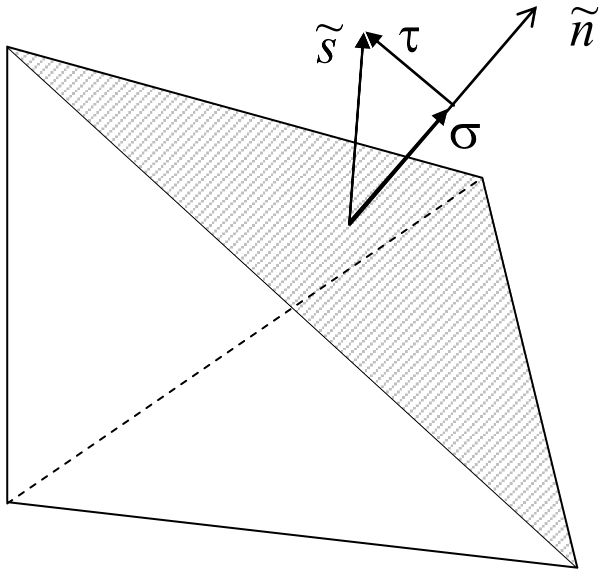
Fråga:

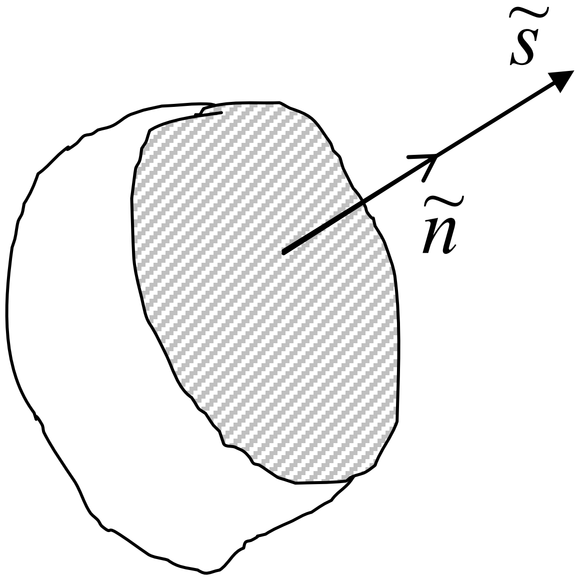
Finns det sådana riktningar
att $\tilde{s}$ och $\tilde{n}$ är parallella dvs så att

$\tilde{s} = \sigma \cdot \tilde{n}$

där σ är konstant?

Detta innebär en snittyta
utan skjuvspänningar

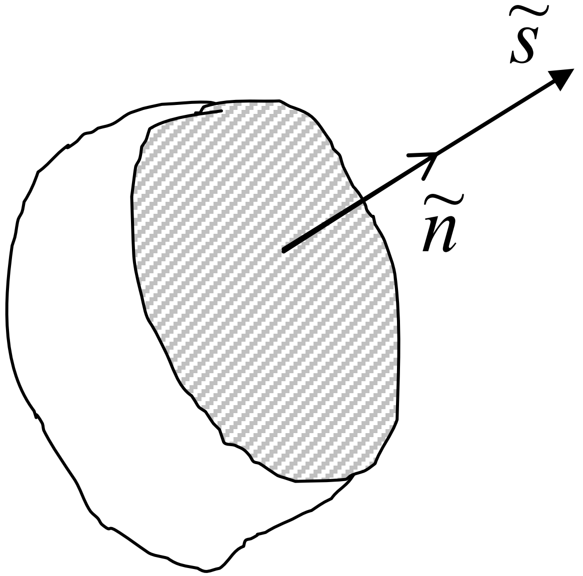




Huvudspänningar

Eftersom $\tilde{s} = \tilde{S}\tilde{n}$ enligt tidigare fås

$\tilde{s} = \tilde{S}\tilde{n} = \sigma \cdot \tilde{n} = \sigma \cdot \tilde{I}\tilde{n}$, där $\tilde{I}$ är identitetsmatrisen



Alltså

$$\tilde{S}\tilde{n} = \sigma \cdot \tilde{I}\tilde{n} \Rightarrow [\tilde{S} - \sigma \cdot \tilde{I}]\tilde{n} = \tilde{0}$$

eller

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \tilde{0}$$

Detta **egenvärdesproblem** har lösningar om:

$$\left| \tilde{S} - \sigma \cdot \tilde{I} \right| = 0$$

Huvudspänningar

$\left|\tilde{S} - \sigma \cdot \tilde{I}\right| = 0$ ger en tredjegradsekvation:

$$\sigma^3 - K_1\sigma^2 + K_2\sigma - K_3 = 0$$

där K_1, K_2 och K_3 är koefficienter som beror på spänningskomponenterna i $\tilde{S}$ (σ_x, σ_{yx}, τ_{xz}, osv).

Rötterna σ_1, σ_2 och σ_3 till ekvationen kallas **huvudspänningar** och är **egenvärden** till $\tilde{S}$.

Huvudspänningar

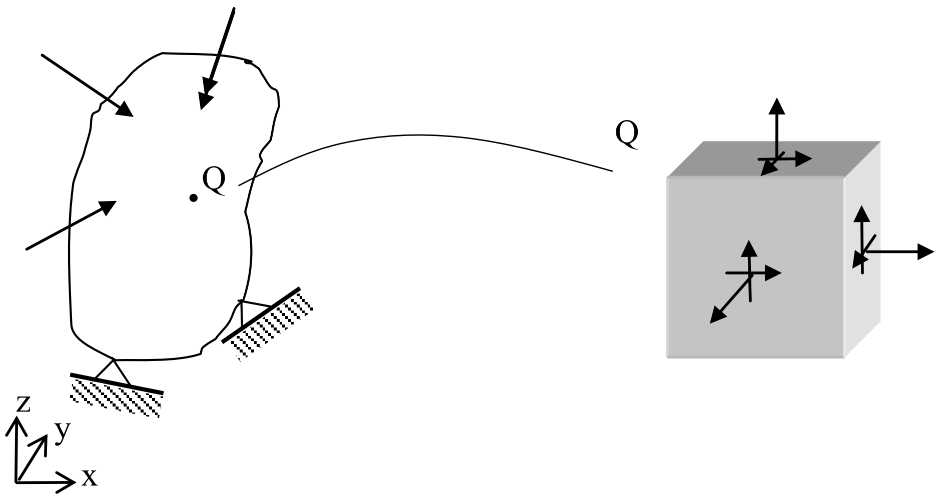
Återsubstitution av dessa huvudspänningar ger motsvarande **huvudspänningsriktningar** $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2$ och $\tilde{n}_3$ som är **egenvektorer** till $\tilde{S}$.

Då $\tilde{S}$ är symmetrisk ($\tilde{S} = \tilde{S}^T$) gäller att **huvudspänningarna är reella** och att **huvudspänningsriktningarna** är inbördes **vinkelräta** mot varandra.

Värdet på elementen i spänningsmatrisen $\tilde{S}$ beror av koordinatsystemet. Om huvudspänningsriktningarna väljs som koordinatsystem får $\tilde{S}$ formen:

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Huvudspänningar

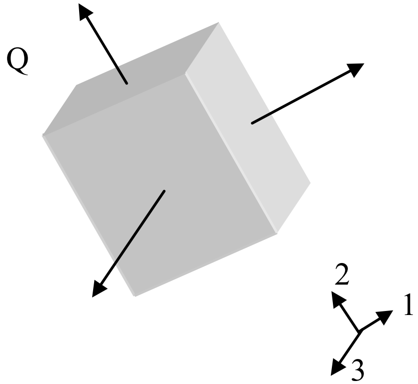


Analys i x y z-systemet ger spänningsmatrisen:

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}_{xyz}$$

Egenvärdesanalys ger en orientering av koordinatsystemet sådan att spänningar på snittytorna endast utgörs av **normalspänningar**, dvs **inga skjuvspänningar** finns.

Detta är **huvudspänningar** och **huvudspänninsriktningar**



$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}_{123}$$

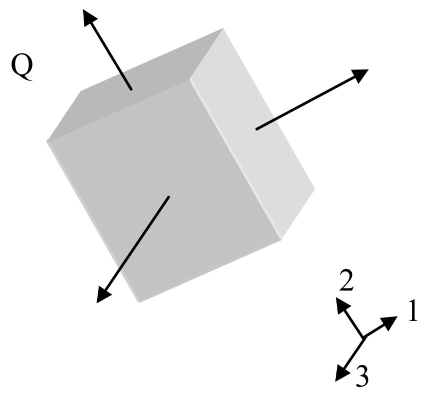
Exempel 2

Givet spänningsmatrisen $\tilde{S}$ beräkna huvudspänningar och huvudspänningsriktningar.

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Huvudspänningar och huvudspänningsriktningar

- Egenvärdesanalys av spänningsmatrisen $\tilde{S}$ ger huvudspänningar och deras riktningar vilka är **oberoende** av hur x,y,z-koordinatsystemet är definierat.



$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}_{123}$$

- Vi har nu 3 spänningsmått σ_1, σ_2 och σ_3 som beskriver spänningstillståndet i en godtycklig punkt.
- Dessa kan användas vid dimensionering mot exempelvis plasticering.

LULEÅ
TEKNISKA
UNIVERSITET